פתרון מטלה 08 — משוואות דיפרנציאליות, 80320

5 ביוני 2026

שאלה 1

נתבונן בבעיית תנאי ההתחלה

$$(\star)\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\\ u(x,0)=f(x)\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)\end{cases}$$

כאשר $f\in C^2(\mathbb{R}),g\in C^1(\mathbb{R})$ ונניח כי $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים, נקבע $x_0\in\mathbb{R},L>0$. לכל $\tau\in\left[0,\frac{L}{c}\right]$ נגדיר

$$E(\tau)=\frac{1}{2}\int_{x_0+c\tau-L}^{x_0+L-c\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\right)^2+c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right)^2(x,\tau)\,\mathrm{d}x$$

סעיף א'

נסביר בקצרה מדוע $E(\tau)$ גזירה.

הוכחה: נבחין שהאינטגרנד גזיר כי $u\in C^2$ ולכן הנגזרות הראשונות שלה קיימות, רציפות וגזירות ברציפות וגם הריבועים של הנגזרות האלו גזירות ברציפות וגם גבולות האינטגרציה הם פונקציות ליניאריות גזירות ולכן לפי כלל לייבניץ לגזירה תחת סימן האינטגרנד $E(\tau)$ גזירה. $\square$

סעיף ב'

נראה כי אם u פותרת את משוואת הגלים אז $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{D}\tau}\leq 0$ כלומר E מונוטונית יורדת.

הוכחה: נעזר בהנחייה. נסביר תחילה למה אפשר להסתכל בלי הגבלת הכלליות על למה $x_0=0$ שכן משוואת הגלים המקורית לא תלויה בקורדינאטה x ולכן אם נגדיר $\tilde{x}=x-x_0$ הנגזרות החלקיות לא ישתנו כלל וגבולות האינטגרציה יזוזו להיות סביב ה־0 ולכן סביב x_0.
נחשב את $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}E(\tau)$. מכלל לייבניץ נקבל מגזירה (ועם לכפול ב־2) ולשם הפשטות נסמן את האינטגרנד הפנימי ב־F

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}E(\tau)=F(L-c\tau,\tau)\cdot(-c)-F(c\tau-L,\tau)\cdot(c)+\int_{c\tau-L}^{L-c\tau}\frac{\partial F}{\partial\tau}(x,\tau)\,\mathrm{d}x$$

נסמן את האינטגרל מהרמז ב־I ומאינטגרציה בחלקים נקבל

$$I=2\int_{c\tau-L}^{L-c\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)\mathrm{d}x$$

u פותרת את משוואת הגלים ולכן ניתן להחליף את $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ב־$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ולקבל

$$I=2\int_{c\tau-L}^{L-c\tau}\left(c^2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)\mathrm{d}x$$

אבל זו בידיוק נגזרת מכפלה לפי x ולכן מהמשפט היסודי של החדו"א נקבל

$$I=2c^2\int_{c\tau-L}^{L-c\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x=2c^2\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=c\tau-L}^{x=L-c\tau}$$

נסמן u_t,u_x ונקבל לנגזרות החלקיות ונקבל

$$(\diamond)\ 2E'(\tau)=\underbrace{-cu_t^2-c^3u_x^2+2c^2u_tu_x}_{x=L-c\tau}+\underbrace{-cu_t^2-c^3u_x^2-2c^2u_tu_x}_{x=c\tau-L}$$

נשים לב שהרמז של האי־שיוויון אומר

$$|ab|\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)\iff 2|ab|\leq a^2+b^2\iff\pm 2ab\leq 2|ab|\leq a^2+b^2$$

נבחר $a=u_t,b=cu_x$ ונקבל

$$\pm 2c|u_tu_x|\leq u_t^2+(cu_x)^2=u_t^2+c^2u_x^2\underset{c>0}{\iff}\pm 2c^2u_tu_x\leq 2c^2|u_tu_x|\leq cu_t^2+c^3u_x^2$$
$$\implies +2c^2u_tu_x lecu_t^2+c^3u_x^2\qquad -2c^2u_tu_x lecu_t^2+c^3u_x^2$$

ואם נעביר אגפים נקבל

$$-cu_t^2-c^3u_x^2\pm 2c^2u_tu_x\leq 0$$

אבל זה בידיוק המחוברים ב־$(\diamond)$ ולכן גם הסכום שלהם הוא מספר שלילי או אפס ולכן $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}E(\tau)\leq 0$. $\square$

סעיף ג'

נסיק כי הפתרון לבעיה $(\star)$ הוא יחיד.

הוכחה: נעזר בהנחייה, נניח כי קיימות $v_2(x,t), v_1(x,t)$ שפותרות את בעיית תנאי ההתחלה $(\star)$ ונגדיר $u(x,t) = v_1(x,t) - v_2(x,t)$.
מכיוון שמשוואות הגלים היא לינארית אז u פותרת את המשוואה ההומגנית עם תנאי התחלה אפס שכן

$$\begin{cases} u_{tt} = (v_1)_{tt} - (v_2)_{tt} = c^2(v_1)_{xx} - c^2(v_2)_{xx} = c^2(v_1 - v_2)_{xx} = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = v_1(x,0) - v_2(x,0) = f(x) - f(x) = 0 \\ u_t(x,0) = (v_1)_t(x,0) - (v_2)_t(x,0) = g(x) - g(x) = 0 \end{cases}$$

אז $u(x,0) = 0$ לכל x ולכן גם $u_x(x,0) = 0$.
עבור $\tau = 0$ מתקיים

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_{x_0-L}^{x_0+L} \left(\left(u_{t(x,0)}\right)^2 + c^2\left(u_{x(x,0)}\right)^2\right) \mathrm{d}x$$

ומתנאי ההתחלה שמצאנו

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_{x_0-L}^{x_0+L} (0^2 + c^2 \cdot 0^2)\, \mathrm{d}x = 0$$

בסעיף הקודם ראינו $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}E(\tau) \leq 0$ ולכן $E(\tau)$ פונקציה מונוטונית יורדת ולכן לכל $\tau \geq 0$ מתקיים גם

$$E(\tau) \leq E(0) = 0$$

אבל מצד שני $E(\tau)$ מוגדרת כאינטגרל על סכום של ריבועים אי־שליליים ואינטגרל של פונקציה אי־שלילית הוא גדול או שווה לאפס ולכן גם

$$E(\tau) \geq 0$$

מטריכוטומיה נקבל $E(\tau) = 0$ לכל $\tau \in \left[0, \frac{L}{c}\right]$.
אבל אינטגרנד של פונקציה רציפה ואי־שלילית שהאינטגרל שלה הוא אפס הפונקציה חייבת להיות זהותית אפס בכל תחום האינטגרציה ולכן

$$(u_t(x,\tau))^2 + c^2(u_x(x,\tau))^2 = 0 \iff u_t(x,\tau) = 0, \quad u_x(x,\tau) = 0$$

אז הנגזרות החלקיות מתאפסות ולכן הפונקציה $u(x,\tau)$ היא פונקציה קבועה וידוע כי $u(x,0) = 0$ ולכן הקבוע הוא אפס, כלומר

$$u(x,\tau) = 0 \iff v_1(x,\tau) - v_2(x,\tau) = 0 \iff v_1(x,\tau) = v_2(x,\tau)$$

משרירותיות L, x_0 נקבל שהשיוויון מתקיים לכל x, t והפיתרון הוא יחיד. $\square$

שאלה 2

נתבונן בבעיה

$$(\star\star)\begin{cases} c(x)\rho(x)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) \ (x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_{\geq 0} \\ T(0,t)=T(L,t)=0 \end{cases}$$

כאשר ρ, c, K פונקציות גזירות ברציפות וחיוביות ו־$0 < L \in \mathbb{R}$.
נניח כי איננו פיזקאים $c(x)=1$ ונמצא מערכת שטורם ליוביל כך שאם T פיתרון ל־$(\star\star)$ מהצורה $T(x,t)=f(t)g(x)$ אז $g(x)$ היא פונקציה עצמית של אותה ומערכת ונמצא את הצורה הכללית של $f(t)$.

פתרון: נציב $T(x,t)=f(t)g(x)$ ב־$(\star\star)$ ונקבל

$$\rho(x)f'(t)g(x) = \frac{\partial}{\partial x}(K(x)f(t)g'(x)) \iff \rho(x)f'(t)g(x) = f(t)\frac{d}{dx}(K(x)g'(x))$$

כדי להפריד משתנים, נחלק את שני האגפים בביטוי $\rho(x)f(t)g(x)$ (תחת ההנחה שהוא שונה מאפס) ונקבל

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{\rho(x)g(x)}\frac{d}{dx}(K(x)g'(x))$$

אגף שמאל תלוי ב־t בלבד ואגף ימין תלוי ב־x בלבד וזה ייתכן רק אם שני האגפים שווים לקבוע בלתי תלוי $-\lambda$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{\rho(x)g(x)}\frac{d}{dx}(K(x)g'(x)) = -\lambda$$

(אותו טריק מההרצאה שמניחים ש־$\lambda > 0$ ועושים את זה כדי לשמור על סימן, אבל זה נובע ממשוואות הזמן כי

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = K \implies f'(t) = Kf(t)$$

ולכן $f(t)=Ce^{Kt}$ ולכן לא ייתכן ש־K חיובי כי הטמפרטורה תגדל מעריכית לאינסוף ככל שהזמן עובר והמוט לא יכול להתחמם מעצמו בלי אנרגיה. אם K שלילי הטמפרטורה תדעך לאפס ככל שהזמן עובר וזה הגיוני כי גוף חם שמתקרר מהסביבה שלו אז אנחנו מכריחים את הקבוע להיות שלילי)
מכאן אנו מקבלים שתי משוואות דיפרנציאליות רגילות. נתחיל בבניית המערכת עבור x: ניקח את האגף התלוי ב־x ונשווה ל־$-\lambda$ ונקבל

$$\frac{1}{\rho(x)g(x)}\frac{d}{dx}(K(x)g'(x)) = -\lambda \iff \frac{d}{dx}(K(x)g'(x)) + \lambda\rho(x)g(x) = 0 \iff (K(x)g'(x))' + \lambda\rho(x)g(x) = 0$$

נתון תנאי השפה $T(0,t)=T(L,t)=0$ ומתקיים $T(x,t)=f(t)g(x)$ שהוא פיתרון לא טריוויאלי ולכן בהכרח מתקיים

$$f(t)g(0)=0 \iff g(0)=0$$
$$f(t)g(L)=0 \iff g(L)=0$$

לכן, מערכת שטורם־ליוביל המבוקשת היא בעיית שפת הערך הבאה:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(K(x)g'(x)) + \lambda\rho(x)g(x) = 0 \\ g(0)=0 \\ g(L)=0 \end{cases}$$

נשים לב שמשוואה זו היא בדיוק בצורת שטורם־ליוביל עבור $q(x)=0, p(x)=K(x), w(x)=\rho(x)$ ומתקיים

$$(p(x)y')' + (q(x)+\lambda w(x))y = 0$$

בשביל הצורה הכללית של $f(t)$, ניקח את האגף התלוי ב־t מתוך משוואת ההפרדה

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\lambda \iff f'(t) = -\lambda f(t)$$

זו משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר ראשון הניתנת להפרדת משתנים או שאפשר להשתמש מהטריק ממרוכבות על חוקי נגזרת כאלו ולקבל שהפיתרון הכללי שלה הוא פונקציה מעריכית $f(t)=Ce^{-\lambda t}$ עבור C קבוע ממשי או מורכב. $\square$

שאלה 3

תהיי מערכת שטורם ליוביל רגולרית

$$(\star\star\star)\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\big)+(q(t)+\lambda\rho(t))u(t)=0\\ u(t)=0\\ u(a)=u(b)=0\end{cases}$$

כאשר p,ρ פונקציות חיוביות ונגדיר $T=\int_a^b\sqrt{\frac{\rho(s)}{p(s)}}\,\mathrm{d}s$. נתבונן במערכת

$$(\star\star\star\star)\begin{cases}w''(\tau)+(Q(\tau)+\lambda)w(\tau)=0\\ w(0)=w(T)=0\end{cases}$$

כאשר הפונקציה $Q:[0,T]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על־ידי

$$Q\left(\int_a^t\sqrt{\frac{\rho(s)}{p(s)}}\,\mathrm{d}s\right)=\frac{1}{\rho(t)}\left(q(t)+(p(t)\rho(t))^{\frac14}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t)\rho(t)\right)^{-\frac14}\right)$$

תהיי $w:[0,T]\to\mathbb{R}$ ונגדיר $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ על־ידי

$$u(t)=(p(t)\rho(t))^{-\frac14}w\left(\int_a^t\sqrt{\frac{\rho(s)}{p(s)}}\,\mathrm{d}s\right)$$

סעיף א'

נראה כי

$$\int_a^b\rho(t)u^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T w^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

ההוכחה היא ל־$w^2(\tau)$ ולא ל־$w(\tau)$ מחוקי חזקות...

פתרון: נציב ומהגדרה נקבל

$$\begin{aligned}\int_a^b\rho(t)u^2(t)\,\mathrm{d}t&=\int_a^b\rho(t)\left[(p(t)\rho(t))^{-\frac14}w(\tau(t))\right]^2\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\rho(t)(p(t)\rho(t))^{-\frac12}w^2(\tau(t))\,\mathrm{d}t=\int_a^b\rho(t)p(t)^{-\frac12}\rho(t)^{-\frac12}w^2(\tau(t))\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\rho(t)^{\frac12}p(t)^{-\frac12}w^2(\tau(t))\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\sqrt{\frac{\rho(t)}{p(t)}}w^2(\tau(t))\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

נשתמש בהחלפת משתנים על־ידי $\tau(t)=\int_a^t\sqrt{\frac{\rho(s)}{p(s)}}\,\mathrm{d}s$ ולכן מהמשפט היסודי $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{\rho(t)}{p(t)}}\Rightarrow\mathrm{d}\tau=\sqrt{\frac{\rho(t)}{p(t)}}\,\mathrm{d}t$.
יש לנו גבולות אינטגרציה חדשים: $t=a$ נהפך ל־$\tau(a)=\int_a^a\sqrt{\frac{\rho}{p}}\,\mathrm{d}s=0$ ו־$t=b$ נהפך ל־$\tau(b)=\int_a^b\sqrt{\frac{\rho}{p}}\,\mathrm{d}s=T$ ולכן

$$\int_a^b\rho(t)u^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{\frac{\rho(t)}{p(t)}}w^2(\tau(t))\,\mathrm{d}t=\int_0^T w^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

□

סעיף ב'

נגדיר $\tau(t)=\int_a^t\sqrt{\frac{\rho(s)}{p(s)}}\,\mathrm{d}s$ ונסמן $w'=\frac{\partial w}{\partial\tau}$, נראה שמתקיים

$$p\frac{\partial u}{\partial t}=(p\rho)^{\frac14}\frac{\partial w}{\partial\tau}(\tau(t))+pw(\tau(t))\frac{\partial}{\partial t}(p\rho)^{-\frac14}$$

פתרון: נגזור את $u(t)$ לפי t ונקבל

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(p\rho)^{-\frac14}\cdot w(\tau(t))+(p\rho)^{-\frac14}\cdot\frac{\partial w}{\partial\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\underset{\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{\rho}{p}}=\rho^{\frac12}p^{-\frac12}}{=}=\frac{\partial u}{\partial t}=w(\tau(t))\frac{\partial}{\partial t}(p\rho)^{-\frac14}+(p\rho)^{-\frac14}\rho^{\frac12}p^{-\frac12}\frac{\partial w}{\partial\tau}$$

ולכן

$$p\frac{\partial u}{\partial t}=pw(\tau(t))\frac{\partial}{\partial t}(p\rho)^{-\frac14}+p\cdot(p\rho)^{-\frac14}\rho^{\frac12}p^{-\frac12}\frac{\partial w}{\partial\tau}$$

נפשט את אגף ימין לפי הנגזרת w ונקבל

$$p\cdot p^{-\frac14}\cdot p^{-\frac12}\cdot\rho^{-\frac14}\cdot\rho^{\frac12}=p^{1-\frac14-\frac12}\rho^{-\frac14+\frac12}=p^{\frac14}\rho^{\frac14}=(p\rho)^{\frac14}$$

נציב בחזרה ונקבל

$$p\frac{\partial u}{\partial t}=(p\rho)^{\frac14}\frac{\partial w}{\partial\tau}(\tau(t))+pw(\tau(t))\frac{\partial}{\partial t}(p\rho)^{-\frac14}$$

□

סעיף ג'

נראה כי

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p\frac{\partial}{\partial t}u\right)+qu=\rho^{\frac34}p^{-\frac14}\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}(\tau(t))+\rho^{\frac34}p^{-\frac14}Q(\tau(t))w(\tau(t))$$

פתרון: נסמן $v(t)=(p(t)\rho(t))^{-\frac14}$ ונזכור $\frac{\partial\tau}{\partial t}=\sqrt{\frac{\rho}{p}}=\rho^{\frac12}p^{-\frac12}$.
מהסעיף הקודם נקבל

$$p\frac{\partial u}{\partial t}=(p\rho)^{\frac14}\frac{\partial w}{\partial\tau}+pv'(t)w$$

נגזור שוב לפי t

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[(p\rho)^{\frac14}\frac{\partial w}{\partial\tau}\right])+\frac{\partial}{\partial t}[pv'(t)w]=\left((p\rho)^{\frac14}\right)'\frac{\partial w}{\partial\tau}+(p\rho)^{\frac14}\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}\cdot\underbrace{\rho^{\frac12}p^{-\frac12}}_{\frac{\partial\tau}{\partial t}}+(pv')'w+pv'\frac{\partial w}{\partial\tau}\cdot\underbrace{\rho^{\frac12}p^{-\frac12}}_{\frac{\partial\tau}{\partial t}}$$

נחבר לפי מקדמי נגזרות של w

1. המקדם של הנגזרת השנייה $\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}$

$$(p\rho)^{\frac14}\rho^{\frac12}p^{-\frac12}=p^{\frac14-\frac12}\rho^{\frac14+\frac12}=p^{-\frac14}\rho^{\frac34}$$

2. המקדם של w הוא $(pv')'$
3. המקדם של הנגזרת הראשונה של w

$$\left((p\rho)^{\frac14}\right)'+pv'\rho^{\frac12}p^{-\frac12}=\left((p\rho)^{\frac14}\right)'+p^{\frac12}\rho^{\frac12}v'$$

נזכור שהגדרנו $v=(p\rho)^{-\frac14}$, ולכן מתקיים $(p\rho)^{\frac14}=v^{-1}$ ונרצה להראות שהמקדם של הנגזרת הראשונה הוא אפס, אז נגזור שוב לפי t

$$\left((p\rho)^{\frac14}\right)'=-v^{-2}v'=-\left((p\rho)^{-\frac14}\right)^{-2}v'=-(p\rho)^{\frac12}v'$$

נציב במקדם שלנו ונקבל $-(p\rho)^{\frac12}v'+(p\rho)^{\frac12}v'=0$ ולכן כל הביטוי שלנו לעיל נהפך להיות

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p\frac{\partial u}{\partial t}\right)=p^{-\frac14}\rho^{\frac34}\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}+(pv')'w$$

נוסיף את qu כאשר אנחנו זוכרים ש־$u=vw$ ונקבל

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p\frac{\partial u}{\partial t}\right)+qu=p^{-\frac14}\rho^{\frac34}\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}+(pv')'w+qvw=p^{-\frac14}\rho^{\frac34}\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}+p^{-\frac14}\rho^{\frac34}\left[p^{\frac14}\rho^{-\frac34}\left((pv')'+qv\right)\right]w$$

נסתכל על הסוגריים המרובעים

$$p^{\frac{1}{4}}\rho^{-\frac{3}{4}}qv + p^{\frac{1}{4}}\rho^{-\frac{3}{4}}(pv')' = p^{\frac{1}{4}}\rho^{-\frac{3}{4}}q(p\rho)^{-\frac{1}{4}} + p^{\frac{1}{4}}\rho^{-\frac{3}{4}}\frac{\partial}{\partial t}\left(p\frac{\partial}{\partial t}(p\rho)^{-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{\rho}q + \frac{1}{\rho}p^{\frac{1}{4}}\rho^{\frac{1}{4}}\frac{\partial}{\partial t}\left(p\frac{\partial}{\partial t}(p\rho)^{-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{\rho}\left(q + (p\rho)^{\frac{1}{4}}\frac{\partial}{\partial t}\left(p\frac{\partial}{\partial t}(p\rho)^{-\frac{1}{4}}\right)\right)$$

וזו בידיוק ההגדרה של $Q(\tau)$ וקיבלנו

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p\frac{\partial u}{\partial t}\right) + qu = \rho^{\frac{3}{4}}p^{-\frac{1}{4}}\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}(\tau(t)) + \rho^{\frac{3}{4}}p^{-\frac{1}{4}}Q(\tau(t))w(\tau(t))$$

□

סעיף ד'

נסיק כי u פותרת את בעיה $(\star\star\star)$ אם ורק אם w פותרת את בעיה $(\star\star\star\star)$ ובמקרה והן פתרון למערכות הערך העצמי שלהן זהה.

הוכחה: לפי מערכת $(\star\star\star)$, משוואת הערך העצמי היא

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p\frac{\partial u}{\partial t}\right) + qu + \lambda\rho u = 0$$

נציב את הביטוי שפיתחנו בסעיף ג' עבור שני האיברים הראשונים באגף שמאל

$$\rho^{\frac{3}{4}}p^{-\frac{1}{4}}[w'' + Qw] + \lambda\rho u = 0$$

נציב את הגדרת $u = (p\rho)^{-\frac{1}{4}}w$ לתוך האיבר האחרון

$$\rho^{\frac{3}{4}}p^{-\frac{1}{4}}[w'' + Qw] + \lambda\rho(p\rho)^{-\frac{1}{4}}w = 0$$

נפשט את המקדם של האיבר האחרון

$$\lambda\rho p^{-\frac{1}{4}}\rho^{-\frac{1}{4}} = \lambda p^{-\frac{1}{4}}\rho^{\frac{3}{4}}$$

נוציא את הגורם המשותף $p^{-\frac{1}{4}}\rho^{\frac{3}{4}}$ מכל המשוואה

$$p^{-\frac{1}{4}}\rho^{\frac{3}{4}}[w'' + Qw + \lambda w] = 0$$

מכיוון שנתון p, ρ הן פונקציות חיוביות ממש בקטע $[a, b]$, הגורם $p^{-\frac{1}{4}}\rho^{\frac{3}{4}}$ אינו יכול להתאפס. לכן ניתן לחלק בו את המשוואה ולקבל

$$w'' + (Q + \lambda)w = 0$$

שזוהי בדיוק המשוואה הדיפרנציאלית של בעיה $(\star\star\star\star)$.
נבדוק את תנאי השפה

$$u(a) = 0 \iff (p(a)\rho(a))^{-\frac{1}{4}}w(\tau(a)) = 0 \iff w(0) = 0$$

שכן המקדם חיובי, אז

$$u(b) = 0 \iff (p(b)\rho(b))^{-\frac{1}{4}}w(\tau(b)) = 0 \iff w(T) = 0$$

הראינו שקיימת שקילות מלאה בין המשוואות הדיפרנציאליות ובין תנאי השפה שלהן תחת אותה החלפת משתנים.
לכן u פותרת את בעיה $(\star\star\star)$ עם ערך עצמי λ אם ורק אם w פותרת את בעיה $(\star\star\star\star)$ עם אותו ערך עצמי λ. □